

Colles de Maths - semaine 21 - MP*2

Julien Allasia - ENS de Lyon

Exercice 1 Résoudre l'équation différentielle

$$x(x-a)y' + (2x-a)y = \sin x,$$

où $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 Résoudre pour $x > 0$ l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 3x y' + y = 0.$$

Indication : On pourra chercher une première solution sous la forme d'une fonction puissance, puis trouver une autre solution en utilisant le Wronskien ou un changement de variable.

Exercice 3 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $f(x) + f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$.

Exercice 4 Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $|u| \leq 1$ et $u(0)^2 + u'(0)^2 = 4$. Montrer que la fonction $u + u''$ s'annule en un point de \mathbb{R} .

Exercice 5 Résoudre l'équation différentielle $y'^2 = y^2$ sur \mathbb{R} .

Exercice 6 Soit q est une fonction continue positive. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' - q(x)y = 0$ admet une unique solution telle que $y(0) = a$ et $y(1) = b$.

Exercice 7 Soit q une fonction continue telle que $\int_0^\infty x |q(x)| dx < \infty$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + q(x)y = 0.$$

Montrer qu'il existe une unique solution f telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$ et $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$.

Exercice 8 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour toute valeur propre λ de A , $\lambda \notin 2i\pi\mathbb{Z}$. Soit $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une fonction continue et 1-périodique. Montrer que le système

$$X' = AX + B(t)$$

possède une unique solution 1-périodique.

Exercice 9 Montrer que toute solution de l'équation différentielle

$$y'' + \left(1 + \frac{4}{x^2}\right) y = 0$$

sur \mathbb{R}_+^* vérifie

$$y(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} A \cos x + B \sin x + o(1).$$

Indication : On pourra utiliser le lemme de Gronwall : si y est continue, b est continue positive et $C \in \mathbb{R}$, alors l'inégalité

$$\forall x \geq 0, \quad y(x) \leq C + \int_0^x b(t) y(t) dt$$

"se résoud en"

$$\forall x \geq 0, \quad y(x) \leq C \exp\left(\int_0^x b(t) dt\right).$$